

Localisation pour un modèle d'Anderson à valeurs matricielles

BOUMAZA Hakim

Paris 13 - LAGA

Kairouan le 09/11/2009

Introduction - Modèles

But : Étudier les propriétés de localisation des modèles d'Anderson suivants :

$$H(\omega) = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_{\mathbb{N}} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_{\omega(n)}(x - \ell n),$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, où l'on suppose que :

- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les fonctions $x \mapsto V_{\omega(n)}(x)$ sont à valeurs dans les matrices symétriques, à support dans $[0, \ell]$ et uniformément bornées en x, n et ω ,
- les variables aléatoires $\omega \mapsto V_{\omega(n)}$ sont *i.i.d.* sur un espace de probabilité complet (Ω, \mathcal{A}, P) ,
- $H(\omega)$ est $\ell\mathbb{Z}$ -ergodique, on note $\Sigma \subset \mathbb{R}$ son spectre presque-sûr.

Introduction - Localisation d'Anderson

Définition

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On dit que l'opérateur $H(\omega)$ a la propriété de **localisation d'Anderson** lorsque :

- le spectre de $H(\omega)$ est purement ponctuel pour P-presque tout $\omega \in \Omega$,
- les fonctions propres associées aux valeurs propres dans I décroissent exponentiellement vers 0 à l'infini.

Introduction - Bande continue

Motivation. $H(\omega)$ peut apparaître comme une discrétisation d'un modèle d'Anderson sur une bande continue dans le plan.

$$H_{bc}(\omega) = -\Delta_2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \omega^{(n)} f(x - n, y),$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R} \times [0, 1]) \otimes \mathbb{R}$, avec des conditions de Dirichlet aux bords, $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\mathbb{R} \times \{1\}$. Les $\omega^{(n)}$ sont des variables aléatoires *i.i.d.*, et f est à support dans $[0, 1]^2$.

Un résultat de localisation - Matrices de transfert

- Comportement asymptotique des solutions de :

$$H(\omega)u = Eu, \quad E \in \mathbb{R}, \quad u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N.$$

- Matrice de transfert :

$$\begin{pmatrix} u(\ell(n+1)) \\ u'(\ell(n+1)) \end{pmatrix} = T_{\omega(n)}(E) \begin{pmatrix} u(\ell n) \\ u'(\ell n) \end{pmatrix}.$$

- Exposants de Lyapounov :

$$\gamma_1(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\log \|T_{\omega(n-1)}(E) \dots T_{\omega(0)}(E)\|),$$

$$\forall p \in \llbracket 1, 2M \rrbracket, \quad \sum_{i=1}^p \gamma_i(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\log \| \wedge^p (T_{\omega(n-1)}(E) \dots T_{\omega(0)}(E)) \|).$$

- Groupe de Fürstenberg : $G(E) = \overline{\langle \text{supp } \mu_E \rangle} \subset \text{Sp}_N(\mathbb{R})$, où μ_E est la loi commune des $T_{\omega(n)}(E)$.

Un résultat de localisation - Propriétés de $G(E)$

Soit L_p le sous-espace de $\wedge^p \mathbb{R}^{2N}$ engendré par

$$\{Me_1 \wedge \dots \wedge Me_p \mid M \in \text{Sp}_N(\mathbb{R})\},$$

où (e_1, \dots, e_{2N}) est la base canonique de \mathbb{R}^{2N} .

Définition

Soient G un sous-ensemble de $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$ et $p \in \{1, \dots, N\}$.

- (i) G est p -contractant s'il existe une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans G telle que la suite $(\|\wedge^p T_n\|^{-1} \wedge^p T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice de rang 1.
- (ii) G est L_p -fortement irréductible s'il n'existe pas d'union finie W de sous-espaces stricts de L_p telle que, $(\wedge^p T)(W) = W$ pour tout $T \in G$.

Un résultat de localisation

Version continue du résultat de Klein, Lacroix et Speis (1991).

Théorème (B., 2009)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact, tel que $\Sigma \cap I \neq \emptyset$, et soit \tilde{I} un intervalle ouvert, $I \subset \tilde{I}$, tel que, pour tout $E \in \tilde{I}$, $G(E)$ soit p -contractant et L_p -fortement irréductible, pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$.

Alors, $H(\omega)$ a la propriété de localisation d'Anderson sur I .

[1] H. Boumaza, Localization for a Matrix-valued Anderson Model, Math. Phys. Anal. Geom. 12(3), 255-286 (2009).

Un résultat de localisation - Stratégie de la preuve

En suivant Klein, Lacroix et Speis (1991) ainsi que Damanik, Sims et Stolz (2002), pour prouver la localisation d'Anderson pour des opérateurs unidimensionnels, on prouve :

- la positivité des exposants de Lyapounov associés à $H(\omega)$ en obtenant une représentation intégrale pour ces exposants.
- La régularité höldérienne de ces exposants.
- La régularité höldérienne de la densité d'états intégrée.
- Une estimée de Wegner.
- Et en appliquant finalement un schéma d'analyse multi-échelle.

Séparabilité des exposants de Lyapounov

Théorème (Bougerol, Guivarch, Raugi)

Soit $E \in \mathbb{R}$. Si $G(E)$ est p -contractant et L_p -fortement irréductible, pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$, alors $\gamma_1(E) > \dots > \gamma_N(E) > 0$. De plus, les exposants de Lyapounov ont aussi la représentation intégrale suivante :

$$\sum_{i=1}^p \gamma_i(E) = \int_{\text{Sp}_N(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}(L_p)} \log \frac{\|\wedge^p M_x\|}{\|x\|} d\mu_E(M) d\nu_{p,E}(\bar{x}),$$

où $\nu_{p,E}$ est une mesure μ_E -invariante sur $\mathbb{P}(L_p)$.

Régularité des exposants de Lyapounov

- Résultat général de continuité höldérienne des exposants de Lyapounov :

Théorème (B., 2008)

Soit I un intervalle compact de \mathbb{R} . On suppose que, pour tout $E \in I$, $G(E)$ est p -contractant et L_p -fortement irréductible, pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$. Il existe alors deux réels $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que, pour $p \in \{1, \dots, N\}$ et tout $E, E' \in I$, on ait :

$$|\gamma_p(E) - \gamma_p(E')| \leq C|E - E'|^\alpha.$$

- Référence :
[2] H.Boumaza, *Hölder continuity of the integrated density of states for matrix-valued Anderson models*, Rev. Math. Phys. 20 (7), 873-900 (2008).

Existence de la densité d'états intégrée

- La densité d'états intégrée est définie, pour tout nombre réel E , par :

$$N(E) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \#\{\lambda \leq E \mid \lambda \in \sigma(H^{(L)}(\omega))\},$$

où $H^{(L)}(\omega)$ est la restriction de $H(\omega)$ agissant sur $L^2([-\ell L, \ell L]) \otimes \mathbb{R}^N$ avec conditions de Dirichlet aux bords.

- En utilisant une formule de Feynman-Kac on prouve que, pour $s > 0$, l'opérateur $e^{-sH^{(L)}(\omega)}$ a un noyau intégral dans $L^2([-\ell L, \ell L]^2) \otimes \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
- La fonction $E \mapsto N(E)$ se réalise comme la fonction de répartition d'une mesure borélienne \mathfrak{n} appelée la "densité d'états".

Régularité de la densité d'états intégrée

- On utilise le résultat suivant.

Théorème (B., 2008)

La densité d'états intégrée associée à l'opérateur $H(\omega)$ existe pour tout $E \in \mathbb{R}$. De plus, si I est un intervalle compact de \mathbb{R} tel que, pour tout $E \in I$, $G(E)$ soit p -contractant et L_p -fortement irréductible, pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$, alors elle est Hölder continue sur tout intervalle ouvert $\tilde{I} \subset I$.

- On utilise la continuité höldérienne des exposants de Lyapounov en obtenant une formule de Thouless :

$$\forall E \in \mathbb{R}, (\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E) = -c + \int_{\mathbb{R}} \log \left(\left| \frac{E' - E}{E' - i} \right| \right) dn(E')$$

où $c \in \mathbb{R}$ est indépendant de E . On utilise aussi les propriétés de la transformée de Hilbert.

Théorème (B., 2009)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un interval compact et soit \tilde{I} un intervalle ouvert, $I \subset \tilde{I}$, tel que, pour tout $E \in \tilde{I}$, $G(E)$ soit p -contractant et L_p -fortement irréductible, pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$.

Alors, pour tout $\beta \in]0, 1[$ et tout $\kappa > 0$, il existe $L_0 \in \mathbb{N}$ et $\xi > 0$ tels que,

$$P \left(d(E, \sigma(H^{(L)}(\omega))) \leq e^{-\kappa(\ell L)^\beta} \right) \leq e^{-\xi(\ell L)^\beta},$$

pour tout E dans I et tout $L \geq L_0$.

La preuve est basée sur la continuité höldérienne de la densité d'états intégrée. Ce théorème implique la localisation d'Anderson en utilisant ensuite l'analyse multi-échelle.

Un exemple particulier - Modèle

- Opérateur de Schrödinger étudié :

$$H_\ell(\omega) = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N + V_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} c_1 \omega_1^{(n)} \mathbf{1}_{[0, \ell]}(x - \ell n) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_N \omega_N^{(n)} \mathbf{1}_{[0, \ell]}(x - \ell n) \end{pmatrix}$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^N$. Les $(\omega_i^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ sont des suites de variables aléatoires *i.i.d.*, de loi commune ν telle que $\{0, 1\} \subset \text{supp } \nu$.

$$V_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell > 0, \quad c_i \in \mathbb{R}^*.$$

Un exemple particulier - Résultats pour $H_\ell(\omega)$

Théorème (B., 2009)

- (i) *Il existe $\ell_C = \ell_C(N) > 0$ tel que, pour tout $\ell < \ell_C$, il existe un interval compact $I(N, \ell)$ tel que, si $I \subset I(N, \ell)$ est un intervalle ouvert avec $\Sigma \cap I \neq \emptyset$, alors $H_\ell(\omega)$ a la propriété de localisation d'Anderson sur I .*
- (ii) *Supposons que $\ell = 1$ et $N = 2$. Il existe un ensemble discret $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ tel que, si $I \subset]2, +\infty[\setminus \mathcal{S}$ est un intervalle compact avec $\Sigma \cap I \neq \emptyset$, alors $H_1(\omega)$ a la propriété de localisation d'Anderson sur I .*

On déduit ce résultat du résultat général précédent en prouvant que :

- (i) $\forall E \in I(N, \ell), G(E) = \text{Sp}_N(\mathbb{R})$.
- (ii) $\forall E \in]2, +\infty[\setminus \mathcal{S}, G(E) = \text{Sp}_2(\mathbb{R})$.

Un exemple particulier - Résultats pour $H_\ell(\omega)$

On utilise le critère de densité suivant :

Théorème (Breuillard et Gelfander, 2003)

Si G est un groupe de Lie connexe réel semi-simple, d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , il existe un voisinage de l'identité $\mathcal{O} \subset G$, sur lequel $\log = \exp^{-1}$ est un difféomorphisme et tel que $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{O}$ engendrent un sous-groupe dense dans G lorsque $\log(g_1), \dots, \log(g_m)$ engendrent \mathfrak{g} .

1. Forme explicite des matrices de transfert : $T_{\omega(n)}(E) = \exp(\ell X_{\omega(n)}(E))$.
2. Éléments de $G(E)$ dans \mathcal{O} .
3. Calcul des logarithmes de ces éléments.
4. Preuve que ces logarithmes engendrent l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$ de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$.

Quelques questions ouvertes

- Résultats de localisation :
 - ▶ Localisation pour $H_\ell(\omega)$ pour tout $\ell > 0$ et $N \geq 1$, dans tout intervalle compact I , $I \subset \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}$.
 - ▶ Comprendre la dynamique aux énergies dans \mathcal{S} .
 - ▶ Localisation pour un opérateur de la forme $H_\ell(\omega)$ avec un potentiel V_0 générique en mesure.
 - ▶ Localisation pour la bande continue (beaucoup plus dur!).
- Dans un intervalle de localisation pour $H(\omega)$, étudier la statistique des valeurs propres de $H(\omega)$.
- Un exemple de marche aléatoire dans $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$ ayant une loi commune singulière.