Université de Kairouan - Mai 2009.

Analyse spectrale et guide d'onde "twisté".

Philippe Briet, Hynek Kovařík, Georgi Raikov, Eric Soccorsi, *Comm.PDE 09*

Le contexte.

L'espace des configurations est $\mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}^3$ est noté $x = (x_t, x_3)$, $x_t = (x_1, x_2)$.

On considère le domaine "tubulaire" défini comme:

-La *section:* ω qui est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ contenant l'origine, ayant une frontiére de classe C^2.

Alors soit $\Omega = \omega \times \mathbb{R}$ le guide non twisté.

-La *rotation :* Soit $x_3 \to \theta(x_3)$, une fonction $C^1(\mathbb{R})$ ayant une dérivée borné et la rotation dans $\mathbb{R}^3$:

$$r_\theta(x_3) = \begin{pmatrix} \cos\theta(x_3) & \sin\theta(x_3) & 0 \\ -\sin\theta(x_3) & \cos\theta(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le guide " twisté" est le domaine de $\mathbb{R}^3$ suivant: :

$$\Omega_\theta = \{r_\theta(x_3)(x),\ x \in \Omega\}.$$

Pb: Etude spectrale du Laplacien Derichlet: $-\Delta^D$ défini sur $\mathrm{L}^2(\Omega_\theta)$, i.e. l'opérateur autoadjoint sur $\mathrm{L}^2(\Omega_\theta)$ défini à partir de la forme quadratique,

$$\tilde{\mathcal{Q}}_\theta[\psi] = \int_{\Omega_\theta} |\nabla\psi(x)|^2 dx, \quad \psi \in \mathrm{D}(\tilde{\mathcal{Q}}_\theta) = \mathrm{H}^1_0(\Omega_\theta).$$

$\mathrm{H}^1_0(\Omega_\theta)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\Omega_\theta)$ pour la norme $\mathrm{H}^1(\Omega_\theta)$.

On préferera étudier ce problème sous la forme suivante: Soit $\mathcal{U}$ la transformation unitaire de $\mathrm{L}^2(\Omega_\theta)$ sur $\mathrm{L}^2(\Omega)$,

$$(\mathcal{U}\psi)(x) = \psi\left(r_\theta^{-1}(x_3)(x)\right).$$

Sur $\mathrm{L}^2(\Omega)$ on considère l'opérateur :

$$H_{\dot\theta} := \mathcal{U}(-\Delta^D)\,\mathcal{U}^{-1} = -\Delta_t - (\dot\theta(x_3)\partial_\varphi + \partial_3)^2.$$

de domaine $D(H_{\dot\theta}) = \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$. Avec

$$\Delta_t := \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \partial_\varphi := x_1\partial_2 - x_2\partial_1.$$

et $\dot\theta \in C^2(\mathbb{R})$, dénote la derivée de θ: *La nature spectrale de cet opérateur dépend de la fonction* $\dot\theta$.

Remarque:
1) $H_{\dot\theta}$ est l' opérateur autoadjoint définie sur $\mathrm{L}^2(\Omega)$ à partir de

$$\mathcal{Q}_{\dot\theta}[\psi] := \tilde{\mathcal{Q}}_\theta[\mathcal{U}^{-1}\psi] = \int_\Omega (|\nabla_t\psi|^2 + |\dot\theta(x_3)\partial_\varphi\psi + \partial_3\psi|^2)\,d\mathbf{x}, \tag{0.1}$$

$\psi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) = \mathcal{U}(\mathrm{H}_0^1(\Omega_\theta))$.

2)Si ω est le disque de $\mathbb{R}^2$ alors ∂_φ est la dérivée angulaire (moment cinétique).

Exp: Si ω est le disque dans $\mathbb{R}^2$, $H_{\dot\theta}$ est unitairement équivalent à l'opérateur $-\Delta^D = H_0$ sur $L^2(\Omega)$. Dans ce cas H_0 commute avec les translations dans la variable longitudinale, $\sigma_d(H_{\dot\theta}) = \emptyset$. Le spectre de H_0 et celui de $H_{\dot\theta}$ est purement absolument continu.

Quelques références :

1) Etude spectrale des guides d'onde présentants des défauts de courbure ou surface mais ou le "twist" n'est pas pris en compte:

Le cas de perturbations locales :

-P. Exner, P. Sheba, Jour. Math.Phys 1989.
-J. Goldstone, R.L. Jaffe, Phys. Rev 1992.
-P.Exner, Jour. Math. Phys, 1993.
-P.Duclos, P. Exner, Rev. Math. Phys., 1995.
-P.Exner, Vugalter, Ann. Inst. Henri Poincaré, 1996.
-P.Duclos, P.Exner, D. Krejcirik, Comm Math Phys, 2001.
-T. Elkholm, H. Kovarik, Comm PDE, 2005.
-S. Ben Hariz, M. Ben Salah, H. Najar, Preprint 2009.

→ des perturbations locales font apparaître des valeurs propres discrétes.

Le cas de perturbations périodiques:

-K Yoshitomi, Jour. Diff Equat., 1998
-A. Sobolev, W.Jonathan, London Math. Soc., 2002.
-F. Bentosela, P. Duclos, P.Exner, Letter in Math. Phys., 2003.

Pb: Montrer que le spectre est purement absolument continu.

Le cas de perturbations aléatoires:

-F.Kleespies, P.Stollmann , Rev Math Phys, 2000.
-H.Najar, Jour. Stat. Phys. 2007.

Pb: Montrer que le spectre est singulier (purement ponctuel).

2) Les Guides d'onde "twistés":

-T. Elkholm, H. Kovarik, D. Krejcirik, Arch. Ration. Mech. Anal., 2008.

→ Si la fonction $\dot{\theta}$ est à support compact alors $\sigma_d(-\Delta^D) = \emptyset$ et ce résultat reste stable sous de petites pertubations locales de la courbure!

-P.Exner, H. Kovarik, Letter Math. Phys., 2005.

→ Si ω n'est pas le disque dans $\mathbb{R}^2$ et $\dot{\theta}$ n'est pas à support compact alors $-\Delta^D$ a toujours au moins une valeur propre discréte, (ce résultat est montré sous certaines conditions).

-Ph.Briet, H. Kovarik, E. Soccorsi, G.Raikov, 2009.

→ On suppose de plus que la fonction $\theta \in C^2(\mathbb{R})$ est telle que $\dot{\theta} = \beta - \varepsilon(x_3)$ ou $\beta > 0$ et la fonction $\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$et satisfait :

$$\lim_{|x_3|\to\infty} |x_3|^\alpha \varepsilon(x_3) = L > 0; \quad \alpha > 0$$

Soit $N(T;t)$, $t \in (-\infty, \mathcal{E}_{ess})$, le nombre de valeurs propres de l'opérateur autoadjoint T dans $(-\infty, t)$, comptant leur multiplicité. Ici $\mathcal{E}_{ess} := \inf \sigma_{ess}(T)$ satisfait $\mathcal{E}_{ess} > -\infty$. Le but de ce travail est de démontrer que :

$$N(H_{\dot{\theta}}; \mathcal{E}_{ess} - \lambda) \sim \lambda^{-\gamma}; \quad \lambda \downarrow 0, \gamma \geq 0. \tag{0.2}$$

Qq pb ouverts:

- Le cas ou θ n'est pas régulier

-Le twist périodique : $\dot{\theta}$ est 1-périodique et existence de spectre absolument continu.

-Le twist aléatoire : $\dot{\theta}(x_3) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \omega_i u(x_3 - i)$ et existence de spectre purement ponctuel.

Le cas du twist constant: $\dot{\theta}(x_3) = \beta; \beta > 0$, $(\varepsilon = 0)$.

$\rightarrow$ l'opérateur s'écrit : $H_\beta := -\Delta_t - (\beta\partial_\varphi + \partial_{x_3})^2, \quad p \in \mathbb{R}.$

Il est invariant par translation dans la direction x_3:

Soit $\mathcal{F}$ la transforme de Fourier partielle dans la variable x_3, i.e.

$$(\mathcal{F}u)(x_t, p) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx_3} u(x_t, x_3) dx_3, \quad (x_t, p) \in \omega \times \mathbb{R}.$$

On obtient que H_β est unitairement équivalent à

$$\hat{H}_\beta := \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} h_\beta(p) dp,$$

définie sur $L^2(\mathbb{R}, L^2(\omega)) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L^2(\omega) dp$.

$$h_\beta(p) := -\Delta_t - (\beta\partial_\varphi + ip)^2, \quad p \in \mathbb{R}, \tag{0.3}$$

est l'opérateur autoadjoint sur $\mathrm{L}^2(\omega)$ de domaine $D(h_\beta(p)) = \mathrm{H}^2(\omega) \cap \mathrm{H}_0^1(\omega)$

- La famille $h_\beta(p)$, $p \in \mathbb{C}$, est analytique type B (livre de Kato)
- $h_\beta(p)$, $p \in \mathbb{C}$ est à résolvante compact $\rightarrow$ le spectre $\sigma(h_\beta(p))$ est discret

On note $E_1(p) \leq E_2(p) \leq ....$ les valeurs propres de $h_\beta(p)$, $p \in \mathbb{R}$.

et $\{\psi_j(x_t; p)\}_{j=1}^{\infty}$ les fonctions propres associées :

$$(h_\beta(p)\psi_j)(x_t; p) = E_j(p, \beta)\psi_j(x_t; p), \quad x_t \in \omega. \tag{0.4}$$

*Les propriétés d'anlyticicité de $h_\beta(p)$ implique que *les fonctions de bande :* $\mathbb{R} \ni p \mapsto E_j(p) \in (0,\infty)$, $j \in \mathbb{N}$, sont continues (analytiques par morceaux), (Reed Simon Tome IV).

* En utilisant que $\mathrm{H}^2(\omega) \hookrightarrow C^l(\overline{\omega})$, $l \in [0,1)$, $\psi_j(\cdot;p) \in C^l(\overline{\omega})$, $j \in \mathbb{N}$.
D'autre part $h_\beta(p)$ est un opérateur elliptique a coefficients dans $C^\infty(\omega)$, alors $\psi_j(\cdot;p) \in C^\infty(\omega)$, $j \in \mathbb{N}$ (S. Agmon: Lectures on Elliptic Boundary Value Problems).

* En utilisant les majorations simples au sens des opérateurs + le min-max :

$$E_j(p) = p^2(1+o(1)), \quad p \to \pm\infty.$$

La théorie générale des opérateurs fibrés (c.f. Section XIII.16, Reed Simon) montre que le spectre de H_β est purement absolument continu. Il coïncide avec

$$\sigma(H_\beta) = \sigma_{\mathrm{ac}}(H_\beta) = \cup_{j\in\mathbb{N}} E_j(\mathbb{R}) = [\mathcal{E},\infty)$$

Par définition : $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\beta) := \min_{p\in\mathbb{R}} E_1(p,\beta)$.

Etude de la première valeur propre

Nous montrons que $E_1(0)$ a un minimum absolu non dégénéré en $p=0$. Soit $\mathcal{E}$ sa valeur. En particulier :

$$\sigma(H_\beta)=\sigma_{ess}(H_\beta)=\sigma_{\mathrm{ac}}(H_\beta)=[\mathcal{E}_{ess}=E_1(0),\infty)$$

En fait nous montrons que $E_1''(0)>0$. Dans ce cas nous dirons que la masse effective existe : $m_e=(2E_1''(0))^{-1}$.

- Les propriétés d'ellipticité de $h_\beta(0)\Rightarrow E_1(0,\beta)$ est une valeur propre simple. Nous pouvons choisir $\psi_1(\cdot;0)\geq 0$ sur ω (Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic P. D. E. of Second Order).
- Par continuité $\exists\delta>0$ tq la première valeur propre $E_1(p)$ est simple et analytique dans $p\in[-\delta,\delta]$.

-Aussi δ peut être choisi tq $[-\delta,\delta]\ni p\mapsto\psi_1(\cdot;p)\in\mathrm{H}^2(\omega)$ soit analytique.

Théorème 0.1. *Let $\beta\in\mathbb{R}$. Alors*

$$E_1(0,\beta)+(1-\epsilon_\omega(\beta))\,p^2\ \leq\ E_1(p,\beta)\ \leq E_1(0,\beta)+p^2,\quad p\in\mathbb{R},\tag{0.5}$$

avec $\epsilon_\omega(\beta):=\frac{\beta^2C_\omega}{1+\beta^2C_\omega}$ *et* $C_\omega:=\sup_{x_t\in\omega}(x_1^2+x_2^2)$.

En conclusion:

Corollaire 0.1. *Soit $\beta\in\mathbb{R}$. Alors $\partial_pE_1(0,\beta)=0$ et $\mu(\beta):=\frac{1}{2}\partial_p^2E_1(0,\beta)>0$.*

$$E_1(p,\beta)=E_1(0,\beta)+\mu(\beta)p^2+O(p^3),\quad p\to 0.$$

De plus pour $p\in\mathbb{R}$, $p\neq 0$ et $\beta\in\mathbb{R}$, $E_1(p,\beta)>E_1(0,\beta)$.

Perturbation du twist constant.

Les résultats:

On rappelle que : $\beta > 0$ est fixé et θ est choisie tq $\dot{\theta}(x_3) = \beta - \varepsilon(x_3)$ ou $\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$. $\rightarrow$

$$H_{\dot{\theta}} = H_\beta + W(\varepsilon, \beta)$$

et

$$H_\beta = -\Delta_t + (\beta\partial_\varphi + \partial_3)^2.$$
$$W(\varepsilon, \beta) := 2\beta\varepsilon\,\partial_\varphi^2 + \partial_\varphi\,\varepsilon\,\partial_3 + \partial_3\,\varepsilon\partial_\varphi - \varepsilon^2\partial_\varphi^2$$

Théorème 0.2. *(Caractérisation du spectre essentiel.)*
Supposons que $\lim_{|x|\to\infty}\varepsilon(x) = 0$. *Alors*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\dot{\theta}}) = \sigma_{\rm ess}(H_\beta) = [\mathcal{E}_{ess}, +\infty)$$

avec $\mathcal{E}_{ess} = E_1(0)$.

Théorème 0.3. *(Caractérisation du spectre discret: cas 1.)*
Supposons que $\exists\alpha \in (0,2)$ *et* $C, L > 0$ *tq*

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^\alpha\varepsilon(x) = L, \quad et \quad |\dot{\varepsilon}(x)| \leq C(1+|x|)^{-\alpha-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}}\, N(H_{\dot{\theta}}; \mathcal{E}_{ess} - \lambda) = \frac{2}{\pi\alpha\sqrt{\mu}} \, \left(2\beta\, L\,\|\partial_\varphi\psi_1(\cdot,0)\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\; B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right)$$

where $\mu = 1/2\partial^2 E_1(0)$ *and* B *is the Euler beta function.*

Discussion:
-Supposons que $\|\partial_\varphi \psi_1(\cdot,0)\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega)} \neq 0$ alors le spectre comporte un nombre infini de valeur propres et la vitesse d'accumulation est donnée par le Théorème .
-Supposons que $\|\partial_\varphi \psi_1(\cdot,0)\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega)} = 0$.

Dans ces conditions on a:

Proposition 0.1. *Supposons $\omega \subset \mathbb{R}^2$ est un C^2 ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Si ω contient l'origine alors, ω est un disque centré à l'origine si et seulement si*

$$\partial_\varphi \psi_1(\cdot;0) = 0.$$

Dans le cas ou ω est un disque ouvert dans $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{D}$ alors pour toute rotation θ, Ω_θ est le cylindre $\mathcal{D} \times \mathbb{R}$. Dans ces conditions $H_{\dot\theta}$ est unitairement équivalent à $-\Delta^D$ défini sur $\mathcal{D} \times \mathbb{R}$, il n'a que du spectre absolument continu!

Théorème 0.4. *(Caractérisation du spectre discret: cas 2.)*
Dans les mêmes conditions que le Théorème précédent mais $\alpha = 2$.
Alors si $2\beta\, L\, \|\partial_\varphi \psi_1(\cdot,0)\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega)} \geq \frac{\mu}{4}$, avec $\mu = 1/2\partial^2 E_1(0)$,

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} |\ln\lambda|^{-1}\, N(H_{\dot\theta}; \mathcal{E}_{ess} - \lambda) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\beta\, L}{\mu}\, \|\partial_\varphi \psi_1(\cdot,0)\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega)} - \frac{1}{4}\right)_+^{1/2}.$$

Si $2\beta\, L\, \|\partial_\varphi \psi_1(\cdot,0)\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega)} < \frac{\mu}{4}$, alors

$$N(H_{\dot\theta}; \mathcal{E}_{ess} - \lambda) = O(1), \quad \lambda \downarrow 0.$$

Théorème 0.5. *Caractérisation du spectre discret: cas 3.)*
Dans les mêmes condition que le théorème 0.4 mais $\alpha > 2$. Alors

$$N(H_{\dot\theta}; \mathcal{E}_{ess} - \lambda) = O(1), \quad \lambda \downarrow 0.$$

Stratégie générale.

On remarque que ces résultats sont similaires aux résultats concernants les opérateurs de Schrödinger du type:

$$H = -\frac{h^2}{2m}\Delta + V$$

Le nombre de valeurs propres dépend du taux de décroissance à l'infini du potentiel V.

Nous allons montrer que l'opérateur $H_{\dot{\theta}}$ est "spectralement" équivalent à un opérateur *effectif* unidimensionnel de la forme :

$$H_{eff} = -\mu\frac{d^2}{dx^2} - V_{eff} = -\frac{1}{2m_e}\frac{d^2}{dx^2} - V_{eff}$$

défini sur $L^2(\mathbb{R})$. Avec $\mu = \partial^2 E_1(0)$ et

$$V_{eff} = 2\beta\|\partial_\varphi\psi_1(\cdot;0)\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega)}\varepsilon(x); x \in \mathbb{R}.$$

On appliquera alors les résultats connus sur ces opérateurs.

La partie délicate est de préciser "spectralement équivalent " : c'est la méthode de la *masse effective.*

$\rightarrow$ plusieurs étapes.

Réduction du problème prés du fond du spectre essentiel.

On se donne $\delta > 0$ tq :

1-$E_1(p)$ est une valeur propre simple et analytique pour $p \in [-\delta, \delta]$.

2- $[-\delta, \delta] \ni p \mapsto \psi_1(\cdot; p) \in \mathrm{H}^2(\omega)$ soit analytique.

Soit

$$\pi(p)\varphi(x_t) := \big(\varphi|\psi_1(p)\big)\psi_1(x_t, p), \quad p \in [-\delta, \delta], \quad \varphi \in \mathrm{L}^2(\omega)$$

et $\chi_\delta : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ la fonction caracteristique de $(-\delta, \delta)$.

$$\mathcal{P}_\delta := \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \chi_\delta(p)\pi(p)dp, \quad P = P_\delta := \mathcal{F}^*\mathcal{P}_\delta\mathcal{F}.$$

P est une projection orthogonale projection sur $\mathrm{L}^2(\Omega)$. On pose $Q = Q_\delta := I - P_\delta$.

Remarque importante: En utilisant le théorème de stabilité de Weil on a aussi que $\sigma_{ess}(QH_{\dot\theta}Q) = \sigma_{ess}(QH_\beta Q) = [\mathcal{E}'_{ess}, +\infty)$ avec

$$\mathcal{E}'_{ess} := \min\Big\{ \min_{|p| \ >\delta}\{E_1(p)\}, \min_{p\in\mathbb{R}}\{E_2(p)\}\Big\} > \mathcal{E}_{ess}.$$

En particulier $N(QH_{\dot\theta}Q; \mathcal{E}_{ess} - \lambda) < const.$ uniformément en $\lambda \geq 0$: cela ne contribue pas dans l'asymptotique $\lambda \to 0$.
C'est aussi vrai si on remplace $QH_{\dot\theta}Q$ par $Q(H_{\dot\theta} + \nu)Q$ ou ν est une fonction s'annulant à l'infini.

Borne supérieur:

$\forall u \in D(H_{\dot\theta})$ on pose $v = Pu$, $w = Qu$ ($u = v + w$). $\forall \eta \in (0, 2\beta)$

$$\big(H_{\dot\theta}u|u\big) \geq \big(H_\beta + (2\beta+\eta)\varepsilon(x_3)\partial_\varphi^2 + R)v|v\big) + \big((H_{\dot\theta} + \nu)w|w\big)$$

-R est un opérateur diff. ayant des coefficients de l'ordre de $|x_3|^{-(\alpha+1)}$, $|x_3| \to \infty$
-$\nu = \nu(x_3)$ est une fonction tq $\lim_{|x_3|\to\infty} \nu(x_3) = 0$. Alors

$$N(H_{\dot\theta}, \mathcal{E}_{ess} - \lambda) \leq N(P(H_\beta + (2\beta+\eta)\varepsilon(x_3)\partial_\varphi^2 + R)P; \mathcal{E}_{ess} - \lambda)) + 0(1); \quad \lambda \to 0$$

Borne inférieur: Par les mêmes arguments, $\forall \eta \in (0, 2\beta)$:

$$N(H_{\dot\theta}, \mathcal{E}_{ess} - \lambda) \geq N(P(H_\beta + (2\beta-\eta)\varepsilon(x_3)\partial_\varphi^2 + \tilde{R})P; \mathcal{E}_{ess} - \lambda)); \quad \lambda > 0 < .$$

-$\tilde{R}$ est un opérateur diff. du même type que$R$

Conclusion: le nombre de valeurs propre de $H_{\dot\theta}$ sous $\mathcal{E}_{ess}$ est déterminer par le nombre de valeurs propre de l'opérateur $\tilde{H}_{eff} = H_\beta + 2\beta\varepsilon(x_3)\partial_\varphi^2$ sur $PL^2(\Omega)$ modulo des termes d'erreur mais petits!

Réduction à un problème unidimensionnel.

Stratégie: $P(H_\beta + 2\beta\varepsilon(x_3)\partial_\varphi^2)P$ sur $PL^2(\Omega)$ est unitairement équivalent à

$$P_\delta \hat{H}_\beta(p) P_\delta - 2\beta\|\partial_\varphi\psi_1(\cdot;0)\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega)}\hat{\varepsilon} = E_1(p)P_\delta - 2\beta\|\partial_\varphi\psi_1(\cdot;0)\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega)}\hat{\varepsilon}$$

sur $P_\delta L^2(\Omega)$ ou $\hat{\varepsilon}$ est l'opérateur obtenu aprés transformée de Fourier.

$\rightarrow$ l'opérateur $E_1(p) - 2\beta\|\partial_\varphi\psi_1(\cdot;0)\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega)}\hat{\varepsilon}$ sur $L^2(-\delta,\delta)$.

Soit l'opérateur unitaire $U : \mathrm{L}^2(-\delta,\delta) \rightarrow P\mathrm{L}^2(\Omega)$ tq $\forall f \in \mathrm{L}^2(-\delta,\delta)$

$$(Uf)(x_t,x_3) := \mathcal{F}^*\tilde{f}, \quad \tilde{f}(x_t,p) := \begin{cases} \psi_1(x_t,p)f(p) & \text{if} \quad x_t \in \omega,\ p \in (-\delta,\delta), \\ 0 \quad \text{if} \quad x_t \in \omega,\ p \in \mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta). \end{cases}$$

$a^2(\lambda)$ l'opérateur de multiplication par $E_1(p) - \mathcal{E}_{ess} + \lambda$ dans $\mathrm{L}^2(-\delta,\delta)$. On a :

$$H_\beta + (2\beta+\eta)\varepsilon(x_3)\partial_\varphi^2 + R - \mathcal{E}_{ess} + \lambda = U(a^2(\lambda) - (2\beta-\eta)\Gamma_0^*\Gamma_0 + \Gamma_R^*\Gamma_R)U^*,$$
$$H_\beta + (2\beta-\eta)\varepsilon(x_3)\partial_\varphi^2 + \tilde{R} - \mathcal{E}_{ess} + \lambda = U(a^2(\lambda) - (2\beta+\eta)\Gamma_0^*\Gamma_0 + \Gamma_{\tilde{R}}^*\Gamma_{\tilde{R}})U^*,$$

$\Gamma_0 : \mathrm{L}^2(-\delta,\delta) \rightarrow \mathrm{L}^2(\Omega)$, est un opérateur intégral de noyau

$$(2\pi)^{-1/2}e^{ix_3p}\gamma_0(x,p), \quad x = (x_t,x_3) \in \Omega.$$
$$\gamma_0(x,p) := \varepsilon(x_3)^{1/2}\partial_\varphi\psi_1(x_t;p).$$

Les termes de restes $\Gamma_{R,\tilde{R}} : \mathrm{L}^2(-\delta,\delta) \rightarrow (\mathrm{L}^2(\Omega))^k$, dont chaque composante est un opérateur intégral dont le noyau est de la la forme : $g(x_3)\partial\psi_1(x_t;p)$ et $g(x_3) \sim |x_3|^{-(1+\alpha)}$.

On utilise le principe de Birman-Schwinger :

Soit $T = T^* \in S_\infty(X)$, $\mathbb{P}_J(T)$ est le projecteur spectral de T associé à l'intervalle $J \subset \mathbb{R}$. Pour $s > 0$ on note

$$n_\pm(s;T) := \text{rank } \mathbb{P}_{(s,\infty)}(\pm T).$$

Si $T_j = T_j^* \in S_\infty(X)$, $j = 1, 2$, on a pour $s_1 > 0$ et $s_2 > 0$

$$n_\pm(s_1 + s_2, T_1 + T_2) \leq n_\pm(s_1, T_1) + n_\pm(s_2, T_2)$$

(Inégalités de Weyl).

Pour $T \in S_\infty(X_1, X_2)$, $n_*(s;T) := n_+(s^2; T^*T), \quad s > 0$.

Si $T_j \in S_\infty(X_1, X_2)$, $j = 1, 2$, on a pour $s_1 > 0$ et $s_2 > 0$

$$n_*(s_1 + s_2, T_1 + T_2) \leq n_*(s_1, T_1) + n_*(s_2, T_2)$$

(Inégalités de Ky Fan)

Soit $H = H_0 + V$ un opérateur autoadjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $V \leq 0$ et $H_0 - compact$. Supposons que $\mathcal{E}_{ess} = 0$, alors : $\forall E < 0$

$$N(T, E) = n_+(1, (H_0 - E)^{1/2} V (H_0 - E)^{1/2}) = n_*(1, |V|^{1/2} (H_0 - E)^{1/2})$$

$\rightarrow$ Reed Simon TIV.

La borne inférieur :

$$N(a^2(\lambda) - (2\beta - \eta)\Gamma_0^*\Gamma_0 + \Gamma_{\tilde{R}}^*\Gamma_{\tilde{R}}; 0) = n_+(1; a_\lambda((2\beta - \eta)\Gamma_0^*\Gamma_0 + \Gamma_{\tilde{R}}^*\Gamma_{\tilde{R}}) \geq$$
$$n_*(\sqrt{(1+s)/(2\beta - \eta)}; \Gamma_0 a_\lambda) - n_*(\sqrt{s}; \Gamma_{\tilde{R}} a_\lambda);$$

La borne supérieur :

$$N(a^2(\lambda) - (2\beta + \eta)\Gamma_0^*\Gamma_0 + \Gamma_R^*\Gamma_R; 0) = n_+(1; a_\lambda((2\beta + \eta)\Gamma_0^*\Gamma_0 + \Gamma_R^*\Gamma_R)a_\lambda) \leq$$
$$n_*(\sqrt{(1-s)/(2\beta + \eta)}; \Gamma_0 a_\lambda) + n_*(\sqrt{s}; \Gamma_R a_\lambda).$$

On montre que les quantits $n_*(\sqrt{s};\Gamma_{\tilde{R}}a_\lambda)$ et $n_*(\sqrt{s};\Gamma_R a_\lambda)$ sont négligeables quand $\lambda \to 0$.

On a pour $\lambda \to 0$: $\forall 0 < \eta < 2\beta$ et $0 < s < 1$

$$n_*(\sqrt{(1+s)/(2\beta-\eta)};\Gamma_0 a_\lambda) \leq N(H_{\dot{\theta}},\mathcal{E}_{ess}-\lambda) \leq n_*(\sqrt{(1-s)/(2\beta+\eta)};\Gamma_0 a_\lambda).$$

Conclusion.

On rappelle que pour $p \in (-\delta, \delta)$

$$a^2(p) = E_1(p) - \mathcal{E}_{ess} + \lambda \sim E_1(0) + \mu p^2 - \mathcal{E}_{ess} + \lambda = \mu p^2 - (-\lambda).$$

En utilisant les mêmes arguments que précédement on montre alors que pour $\lambda \sim 0$, $\forall t \in (0, 1)$

$$n_*((1+t)); \Gamma_0(\mu p^2 + \lambda)^{-1/2}) \leq N(H_{\dot{\theta}}, \mathcal{E}_{ess} - \lambda) \leq n_*((1-t); \Gamma_0(\mu p^2 + \lambda)^{-1/2}).$$

On remarque que par le principe de B-S:

$$n_*(l; \Gamma_0(\mu p^2 + \lambda)^{-1/2}) = n_+(l^2, (\mu p^2 + \lambda)^{-1/2})\Gamma_0^*\Gamma_0(\mu p^2 + \lambda)^{-1/2}) =$$

$$N(\mu p^2 - l^{-2}\Gamma_0^*\Gamma_0, -\lambda)$$

et par transformée de Fourier

$$= N(-\mu\Delta - l^{-2} 2\beta \|\partial_\varphi \psi_1(\cdot; 0)\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega)} \varepsilon(x); -\lambda)$$

qui est le nombre de valeurs de l'opérateur effectif sous $-\lambda$. C'est un opérateur unidimensionnel on applique alors les résultats connus : Reed Simon T IV, Levitan Sargsyan *Introduction to spectral theory of selfadjoint ordinary differential Operators*, Kirsch-Simon, Ann. Phys 1988.

On rappelle que : $\Gamma_0 : \mathrm{L}^2(-\delta, \delta) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$, est un opérateur intégral de noyau

$$(2\pi)^{-1/2} e^{ix_3 p} \gamma_0(x, p), \quad x = (x_t, x_3) \in \Omega.$$

$$\gamma_0(x, p) := \varepsilon(x_3)^{1/2} \partial_\varphi \psi_1(x_t; p).$$